Hjemmeopgave 1
Makroøkonomi, 1. årsprøve, foråret 2005
Vejledende besvarelse

Opgave 1

1.1 Korrekt. Arbejdsstyrken er en beholdnings- (stock) variabel, idet man på et givet tidspunkt (fx 1. jan) kan tælle, hvor mange der er inkluderet. Så en beholdningsvariabel er målt på et bestemt tidspunkt.

1.2 Korrekt. Antal arbejdstimer ydet på et år er en strøm- (flow) variabel, idet man bliver nødt til at finde antal arbejdstimer i en givet periode, her et år (fx 1. jan 2004 – 31. dec. 2004). Så en strømvariabel skal måles i enheder af tid.

1.3 Forkert. Lønandelen kan udtrykkes som lønindkomesten (wL) delt med BNP (Y):

$$\text{Lønandel} = \frac{wL}{Y}$$

Realllønnen, w, kan udtrykkes ved:

$$w = MPL \Leftrightarrow w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-a}$$

Lønandel kan nu defineres som

$$\text{Lønandel} = \frac{wL}{Y} = \frac{(1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} L}{K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \frac{(1-\alpha) K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = (1-\alpha)$$

1.4 Korrekt. Empirisk ligger lønandelen på omkring 2/3 på lang sigt, hvilket kan ses fra Mankiw, Figur 3-13. Når lønandelen bliver udtrykt ved $(1-\alpha)$, så kan det heraf ses, at $(1-\alpha) = 2/3 \Leftrightarrow \alpha = 1/3$.

1.5 Forkert. Når skatten falder øges den disponible indkomst, $Y - T$, hvilket får privatforbruget, $C(Y-T)$, til at stige med den marginale forbrugstilbøjlighed ganget skattelettelsen, $C'(Y-T)\,dT$. Da den marginale forbrugstilbøjlighed er mindre en en, vil den private opsparing stige med den resterende skattelettelse, $(1 - C'(Y-T))dT$. Da de offentlige forbrug er uændret, vil skattelettelsen medføre et fald i den offentlige opsparing svarende til dT. Da $1 - C'(Y-T) < 1$ vil stigningen i den private opsparing ikke kunne opveje faldet i den offentlige opsparing, og den samlede opsparing vil derfor falde. Da $S = I$ vil investeringerne falde tilsvarende, og realrenten må stige for at sikre denne ligevægt.

1.6 Korrekt. Kvatitetsteorien er baseret på følgende tre antagelser:

(1) BNP er udbudsbestemt: $Y = F(\overline{K}, \overline{L}) = \overline{Y}$
(2) Konstant omløbshastighed: $V = \overline{V}$
(3) Kvantitetsligningen: $M \cdot V = P \cdot Y$

Kvantitetsteorien betyder derfor, at $M \cdot \overline{V} = P \cdot \overline{Y}$. Omskrives dette til vækstrater, fåes udtrykket

$$\frac{dM}{M} + \frac{d\overline{V}}{\overline{V}} = \frac{dP}{P} + \frac{d\overline{Y}}{Y}$$

Fra (1) og (2) ved vi, at $\frac{dY}{Y} = \frac{d\overline{V}}{V} = 0$. Dermed ved vi, at

$$\frac{dM}{M} = \frac{dP}{P} \tag{1}$$

Kvantitetsteorien siger altså, at en ændring i vækstraten i pengemængden ($\frac{dM}{M}$) indebærer en lige så stor ændring i vækstraten i priser ($\frac{dP}{P}$). Vækstraten i priser er netop ændring i inflationsraten, og spørgsmålet er derfor korrekt.

1.7 Forkert. Dette er kun en approksimation (se Mankiw s. 89, fodnote 5). Formelt er realrenten givet ved $r = \frac{i-\pi}{1+\pi}$, hvor i =nominel rente og π =inflation. Dette kan findes ved at, inflationen, π, er givet ved

$$\pi = \frac{dP}{P} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1$$

Så 1 krones reale værdi i periode t er $\frac{1}{p_t}$.I periode $t+1$ er den reale værdi af 1 krone investeret på tidspunkt t til den nominelle rente i_t givet ved $\frac{1+i_t}{P_{t+1}}$. Så den realrente, der bliver givet i periode t kan udregnes som

$$r_t = \frac{\frac{1+i_t}{P_{t+1}} - \frac{1}{P_t}}{\frac{1}{P_t}} = \frac{1+i_t}{\frac{P_{t+1}}{P_t}} - 1 = \frac{1+i_t}{1+\pi} - 1 = \frac{i_t - \pi}{1+\pi} \tag{2}$$

Vi siger at r er approksimativt lig $i_t - \pi_t$, idet $1 + \pi_t$ er meget tæt på 1 (for små værdier af π).

1.8 Forkert. Det er ændringen i den forventede inflationsrate, π^e, der (givet r) overvæltes 1:1 i den nominelle rente (derfor udtrykket "more precisely written", Mankiw s. 92). Man skelner mellem ex-ante og ex-post Fisher ligningen:

$$\text{Ex-ante:} \quad -i = r + \pi^e \quad \text{(forventet inflation)}$$

$$\text{Ex-post:} \quad -1 = r + \pi \quad \text{(faktisk inflation)}$$

Sondringen skyldes, at den nominelle rente ikke kan tilpasses den faktiske inflation, som ikke er kendt på fastsættelsestidspunktet. Kun hvis $\pi^e = \pi$ vil man kunne udlede sammen sammenhæng mellem den nominelle rente og faktisk inflation

Opgave 2

Modellen består af følgende 6 relationer:

$$\begin{aligned}
Y &= K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 && (3)\\
Y &= C + I + G && (4)\\
C &= c^p(Y - T), \quad 0 < c^p < 1 && (5)\\
G &= c^g Y, \quad 0 < c^g < 1 && (6)\\
T &= G && (7)\\
\delta K &= I, \quad 0 < \delta < 1 && (8)
\end{aligned}$$

Endogene variable: Y, K, C, G, T og I
Exogene variable: L
Parametre: α, c^p, c^g og δ

2.1 Ligningerne (1)-(4) kan beskrives som:

(1) Teknisk relation: Cobb-Douglas produktionsfunktion, hvor produktionen (Y) afhænger af de to produktionsfaktorer (K) og arbejdskraft (L). Parameteren α $(1-\alpha)$ afspejler kapitalens (arbejdskraftens) produktivitet.

(2) Identitet for en lukket økonomi: opdeler efterspørgslen i privat forbrug (C), investeringer (I) og offentligt forbrug (G).

(3) Adfærdsrelation: forbrugsfunktion der relaterer det private forbrug (C) til den disponible indkomst ($Y - T$), hvor c^p er den marginale forbrugstilbøjlighed. c^p angiver derfor hvor stor en andel af den disponible indkomst vil blive brugt på forbrug. Resten $(1 - c^p)$ vil gå til privat opsparing.

(4) Adfærdsrelation: offentlig forbrugsfunktion der relaterer det offentlige forbrug (G) til økonomiens samlede indkomst, hvor c^g er den offentlige sektors andel af økonomien. Resten $(1 - c^g)$ vil gå til privat forbrug og investeringer.

Det fremgår, at modellen er en langsigtsmodel da det offentlige budget er balanceret ($T = G$) og da BNP er udbudsbestemt. Y er på langt sigt begrænset af adgangen til de to produktionsfaktorer arbejdskraft (L) og kapital (K). Den strukturelle ledighed (L) er eksogent givet - bliver ikke påvirket af konjunkturcykler - og K vil på langt sigt afhænge af omfanget af opsparing og investering i økonomien. Relation (6), $\delta K = I$, er udledt på baggrund af følgende bevægelsesligning for kapital:

$$\Delta K = I - \delta K$$

På langt sigt vil størrelsen på kapitalapparatet være uændret ($\Delta K = 0$), så relation (6) er et langsigtskrav. Så længe kapitalapparatet er under tilpasning til sit konstante, langsigtede niveau, behøver nedslidning (δK) og investering (I) ikke være lige store.

2.2 Bruttoopsparing kan defineres som summen af den private og offentlige opsparing:

$$S = (Y - T - C) + (T - G)$$

Bruttoopsparingen kan derfor skrives som den samlede produktion fratrukket det private og det offentlige forbrug:

$$S \equiv Y - C - G$$

Hvis vi indsætter de to forbrugsfunktioner, $C = c^p(Y - T)$ og $G = c^g Y$, får vi følgende udtryk for den samlede opsparing:

$$\begin{aligned}
S &= Y - c^p(Y - T) - c^g Y && \text{hvor } T = G \text{ indsættes} \\
&= Y - c^p(Y - G) - c^g Y && \text{hvor } G = c^g Y \text{ indsættes} \\
&= Y - c^p(Y - c^g Y) - c^g Y \\
&= [1 - c^p(1 - c^g) - c^g]Y \\
&= (1 - c^p)(1 - c^g)Y \\
&= sY && \text{hvor } s \equiv (1 - c^p)(1 - c^g)
\end{aligned}$$

Da $0 < c^g < 1$ og $0 < c^g < 1$ ved vi, at $0 < s < 1$. Da S er den samlede opsparing, vil s være opsparingsraten (eller den marginale opsparingstilbøjlighed), dvs. den andel af BNP som går til opsparing. Eftersom $S = I$ vil s også kunne fortolkes som investeringskvoten. Opsparingskvoten er sammensat af to led. Det første led $(1 - c^p)$ udtrykker den private opsparingsrate, dvs. den del af den disponible indkomst, der ikke går til forbrug. Det andet led udtrykker den disponible indkomst, $(Y - T)$, dvs. den del af økonomiens samlede indkomst, der ikke får til skatter og dermed til offentligt forbrug. Dette kan ses ved at sammenkoble relation (4) og (5):

$$G = c^g Y = T \Leftrightarrow c^g = \frac{T}{Y} \Leftrightarrow 1 - c^g = 1 - \frac{T}{Y} \Leftrightarrow Y(1 - c^g) = Y - T \tag{9}$$

Resultatet følger af, at det offentlige ikke sparer op men derimod har et balanceret budget. Økonomiens opsparing må derfor udgøres udelukkende af den private opsparing, som er den marginale forbrugstilbøjlighed ganget med den disponible indkomst. Opsparingskvoten falder ved en stigning i enten c^p (øget privat forbrug) eller c^g (øget offentligt forbrug).

2.3 Den samlede model kan skrives ned til følgende fire ligninger

$$\begin{aligned}
Y &= K^\alpha L^{1-\alpha} && (1') \\
S &= I && (2') \\
S &= sY && (3') \\
\delta K &= I && (4')
\end{aligned}$$

Endogene variable: Y, S, I og K
Eksogene variable: L
Parametre: α, s og δ

(1') er en gentagelse af (1). Fra relation (2) får vi, at $I = Y - C - G$. Da vi i 2.2 tillige har fået defineret $S \equiv Y - C - G$, vil de to relationen samlet være ensbetydende med, at $S = I$ i (2'). I 2.2 viste vi, at (3), (4) og (5) indebærer at $S = sY$. (4') er en gentagelse af (6). I forhold til tidligere opgaver har vi nu gjort opsparingen eksplicit ved både af definere en opsparingsfunktion, en investeringsfunktion samt en ligevægtsbetingelse.

2.4 Den uordnede kausalanalyse giver:

	Y	K	S	I	Eksogene og parametre
(1')	x	x			L, α
(2')			x	x	
(3')	x		x		s
(4')		x		x	δ

Modellen er simultan og kan derfor ikke ordnes. Der er to krydser i hver række, men man kan ikke finde to rækker som indeholder de samme to variable.

2.5 Den første ligning er blot en gentagelse. Den anden ligning følger ved at indsætte $S = sY$ og $I = \delta K$ i $S = I$. Idet opsparingen er en fast andel af BNP, og investeringerne i langsigtsligevægt netop svarer til nedslidningen af kapitalapparatet, bestemmes de variable alene af hhv. BNP og kapitalapparatets størrelse.

2.6 Langsigtsligevægten er per definition løsningen af den reducerede model fra spørgsmål 2.5 mht. de to endogene variable Y og K. Fra $sY = \delta K$ fås $K = \frac{s}{\delta}Y$. Dette indsættes i produktionsfunktionen, hvilket giver

$$\begin{aligned} Y &= K^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ &= \left(\frac{s}{\delta}Y\right)^{\alpha} L^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ Y^{1-\alpha} &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\alpha} L^{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ Y &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \end{aligned}$$

som angivet i opgaveteksten. Det fundne udtryk for BNP indsættes i $K = \frac{s}{\delta}Y$

$$\begin{aligned} K &= \frac{s}{\delta}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\ &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\ &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L \end{aligned}$$

Hermed er BNP og kapitalapparatet udtrykt alene som funktion af parametre og den eksogene variabel L. Det ses, at BNP og kapitalapparat begge er større, jo større opsparingskvoten og jo mindre nedslidningsraten er (dog vil effekten på K være større end effekten på Y, da $\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{1-\alpha}$). Det skyldes, at større opsparing giver plads til større investeringer og dermed et større kapitalapparat, hvilket muliggør større produktion. En højere nedslidningsrate kræver modsat større investeringer for blot at opretholde kapitalapparatet. Dermed vil et givet opsparings- og investeringsomfang ikke resultere i den samme udvidelse af kapitalapparatet som ved en mindre nedslidningsrate.

2.7 Ved at udnytte $s = (1 - c^p)(1 - c^g)$ kan de to udtryk føres tilbage til grundparametrene

$$\begin{aligned} Y &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\ &= \left(\frac{(1-c^p)(1-c^g)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\ K &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L \\ &= \left(\frac{(1-c^p)(1-c^g)}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L \end{aligned}$$

Det fremgår, at en stigning i den offentlige forbrugstilbøjelighed vil sænke BNP og kapitalapparatet i den langsigtede ligevægt. Det skyldes, at det stigende offentlige forbrug for et givet Y sænker den nationale opsparing. Dermed er opsparingen ikke tilstrækkelig til at finansiere de nødvendige investeringer for at opretholde kapitalapparatet, der derfor falder. Den mindre kapitalmængde sammen med det konstante udbud af arbejdskraft medfører et fald i BNP. Bemærk at den offentlige opsparing er konstant lig nul i denne proces, da forøgelsen af det offentlige forbrug er fuldt finansieret. Faldet i den samlede opsparing kommer derimod fra de private husholdninger, der sænker deres opsparing som reaktion på et stigende skattetryk.

2.8 Fuld crowding-out opstår, når en stigning i én efterspørgselskomponent ledsages én til én af fald i andre efterspørgselskomponenter. I den klassiske model fra Mankiw kap. 3 er der fuld crowding-out, fordi BNP er udbudsbestemt og udbudet af produktionsfaktorer er fast. En finansieret ekspansion af det offentlige forbrug vil da fortrænge privat forbrug og investeringer af samme størrelse. I den udvidede model, vi betragter, er BNP ganske vist udbudsbestemt, men udbudet af kapital er endogent og afhænger af opsparingen. Den umiddelbare effekt af større offentligt forbrug (og den medfølgende skattestigning) er som hos Mankiw, at der fortrænges privat forbrug og investeringer i samme omfang som stigningen i det offentlige forbrug. Altså fuld crowding-out. Men derudover kommer en dynamiske effekt, hvorved investeringsfaldet sænker fremtidigt BNP. Dermed falder forbrug og investeringer på lang sigt endnu mere, hvorfor der i denne model er *mere end fuld crowding-out*.

2.9 Det er muligt, at en skattestigning på lang sigt vil reducere det offentlige forbrug. Det skyldes, at statens indtægter falder i takt med faldet i BNP, og da det statslige budget skal være balanceret, må også det offentlige forbrug falde. Betingelsen for faldende offentligt forbrug vil således være et tilstrækkeligt stort fald i BNP til at opveje den stigende offentlige forbrugskvote. Dette kan formaliseres ved at udnytte $G = c^g Y$ til at finde et udtryk for det offentlige forbrug på lang sigt. Indsættes løsningen for BNP fås

$$\begin{aligned} G &= c^g \left(\frac{(1-c^p)(1-c^g)}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\ &= c^g (1-c^g)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{1-c^p}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \end{aligned}$$

Effekten af en stigning i c^g kan findes ved at differentiere udtrykket for G mht. c^g

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial c^g} &= \left((1-c^g)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha} c^g (1-c^g)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \right) \left(\frac{1-c^p}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\
&= \left(\frac{1}{c^g} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{1-c^g} \right) c^g (1-c^g)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{1-c^p}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \\
&= \left(\frac{(1-\alpha)(1-c^g) - \alpha c^g}{c^g (1-\alpha)(1-c^g)} \right) G \\
&= \frac{1-\alpha-c^g}{c^g (1-\alpha)(1-c^g)} G \gtreqless 0 \quad for \quad c^g \lesseqgtr 1-\alpha
\end{aligned}$$

Det fremgår, at G og T vil stige på lang sigt, såfremt $c^g < 1-\alpha$. Hvis $c^g > 1-\alpha$, vil langsigtsvirkningen være et fald i skatteprovenuet. $c^g = 1-\alpha$ repræsenterer således Laffer-kurvens toppunkt. I dette punkt er skatteindtægterne maksimale. At der er Laffer-effekter på skatteprovenuet skyldes, at skatterne reducerer husholdningernes disponible indkomst, ceteris paribus. Dermed mindskes opsparingen, og kapitalakkumulationen hæmmes. Resultatet er, at det langsigtede niveau for BNP reduceres. I den forstand er skatterne forvridende ved at mindske opsparings- og dermed investeringslysten. Det er altså muligt, at en stigning i skattetrykket ikke fører til øget skatteprovenu, hvis faldet i BNP er tilstrækkeligt stort til at opveje den højere skattesats (tænk på kage-allegorien: Staten opkræver en større bid af kagen, men de svækkede incitamenter får kagen til skrumpe så meget, at statens stykke i sidste ende bliver mindre).

Er det realistisk, at $c^g < 1-\alpha$ er opfyldt i praksis? Bemærk at $1-\alpha$ er lønindkomstens andel af BNP. Denne sættes normalt til ca. $\frac{2}{3}$, jf. Mankiw figur 3-13. Kravet er således, at den offentlige sektor udgør mindre end $\frac{2}{3}$ af BNP, hvilket ikke er urimeligt selv for lande med en stor offentlig sektor som Danmark.